

# 120 - Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

## I) Familles de vecteurs [Gou]

Famille libre, génératrice, base. Base incomplète.

Supplémentaires

Classification des ev de DF par la dim

## II) Rang et applications linéaires [Fresnel – Algèbre des matrices]

Rang, théorème du rang. Rang d'une AL, d'une matrice, mineurs, rang d'une famille de vecteurs.

Dimension du commutant

## III) Rang et actions de groupe [BMP] + [Szp]

### 1) Action de Steinitz [BMP]

Tout sur l'action (orbites...)

### 2) Action par congruence [Szp]

Classification des fq

## IV) Dimension en analyse [Rudin anaf]

Submersions,  $PSL_2=SO_3$

Sous espaces fermés de  $L^p$

Boule unité compacte ssi ev de DF ; compacts = fermés bornés. Normes équivalentes.

Les applications linéaires sont continues

## V) Extension de corps vues comme espace vectoriels [Goz]

Multiplicativité des degrés

Degré fini => algébrique

Wantzel

Gauss

Développements :

1 - Sous espaces fermés de  $L^p$  [Rud Analyse fct 111] (\*\*)

2 - Wantzel [Goz] (\*\*)

3 - SETIM

Théorème de Gauss [Carrega 48] (\*)

Rapport du jury : c'est une leçon qui contrairement aux apparences est devenue difficile pour les candidats. Il faut absolument la préparer avec méthode. Énormément de candidats ont déçu le jury sur cette leçon. Nombre d'entre eux

n'ont pas été capable de donner des réponses satisfaisantes à des questions élémentaires comme : un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie, est-il aussi de dimension finie ? Contrairement aux apparences, cette leçon classique présente des difficultés sur la logique de présentation, la cohérence du plan et le traitement intégral du sujet ! Il faut présenter une définition cohérente et pratique de la dimension finie. Les exemples doivent mettre en évidence la notion de rang ou dimension, par exemple en dualité, dans les formes quadratiques et bien-sûr sur les matrices. Le jury accepte que soit proposé en développement le traitement précis de points du cours, par exemple on peut proposer "Théorème de la dimension + base incomplète + dimension d'un sous-espace". Ne proposer que le théorème de la base incomplète, ou le théorème du rang, n'est pas suffisant au niveau de l'Agrégation.

Plan alternatif :

- I) Famille de vecteurs
- II) Rang, appl lin (Jordan, Steinitz)
- III) Rang, alg bilin (indice, classification)
- IV) Extension de corps
- V) Analyse